Plan de semestre

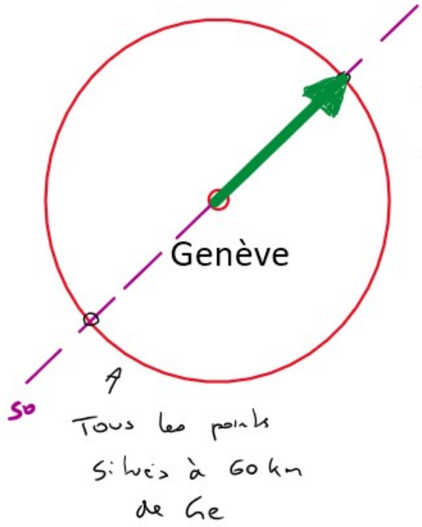
Chapitre 3 : Géométrie vectorielle (un examen écrit mi-semestre) 50% de la note.

Chapitre 4 : Probabilités et Statistiques (TP via rapport / oral) 50% de la note.

<u>Chapitre 3 : Géométrie vectorielle</u>

Qu'est-ce qu'un vecteur ?

1. Longueur/distance "***NORME***"
2. Direction (Sud-Ouest->Nord-Est)
3. Sens

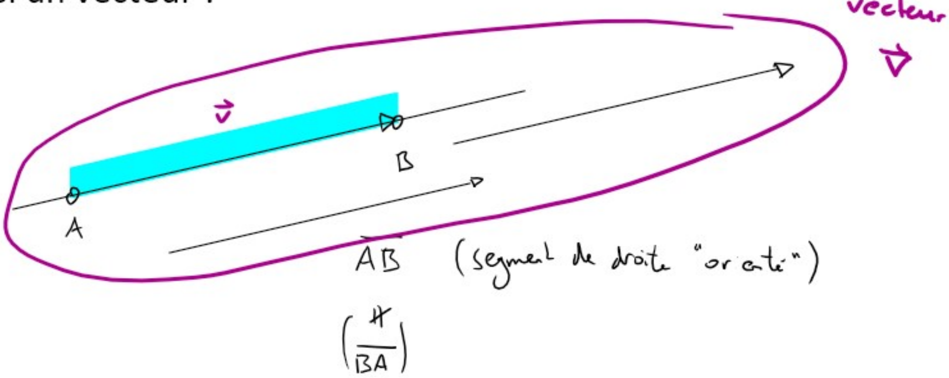


Village de pêcheur
Au bord du lac
de Genève

Un vecteur est déterminé de manière UNIQUE par les 3 éléments (norme, direction et sens).

ATTENTION : dans la définition du VECTEUR, le point d'origine n'a pas d'importance !!!

ANALOGIE en utilisant les SEGMENTS DE DROITE :
Une droite définit une direction !
Avec un segment d'une droite, on a une direction, une longueur et il suffit de définir le sens, et on obtient un vecteur !
Or, comme 2 points A et B définissent une droite, ils définissent aussi un vecteur !

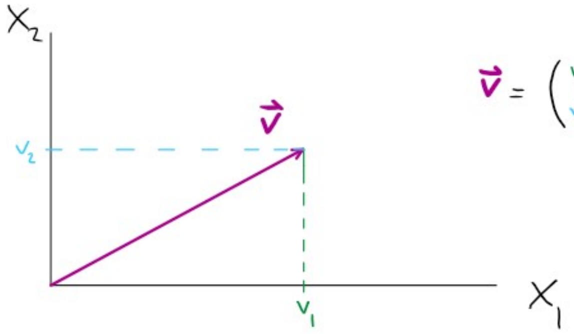


Tous les segments de droite de MEME longueur et de même sens et directions correspondent au même vecteur !!!

NOTATION:

Un vecteur (en 2D) est noté $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \left(= [v_1, v_2] \right)$

$\vec{V} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ où v_1 et $v_2 \in \mathbb{R}$.



$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

On peut généraliser le principe avec des vecteurs à N dimensions ($N \in \mathbb{N}^*$)

Un vecteur $\vec{V} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \underset{\hat{}}{\overset{v_N}{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}^N \qquad \vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

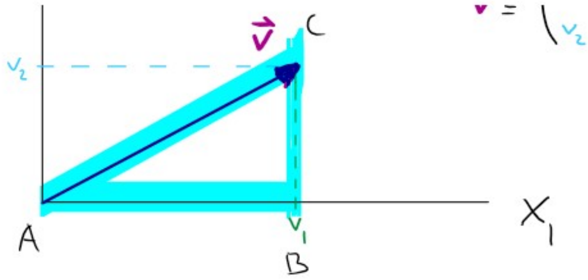
$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad v_1, v_2, \dots, v_N \in \mathbb{R}.$$

Exemple : pixel sur votre écran a 5 dimensions : $\vec{P}$ = (x, y, R, G, B).

$$\vec{P} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{256\} \times \{256\} \times \{256\}$$

Norme d'un vecteur $\vec{V}$ est sa longueur et on la note $\|\vec{V}\|$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$



Pythagore : $(\overline{AC})^2 = (\underbrace{\overline{AB}}_{v_1})^2 + (\underbrace{\overline{BC}}_{v_2})^2$

$(\|\vec{v}\|)^2$

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}}$$

Généralisation de la norme à N dimensions :

Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + \dots + (v_N)^2}$$

<u>Exercice (Preuve) :</u>

Un vecteur est de norme égale à zéro — SI ET SEULEMENT SI $\Longleftrightarrow$ — Le vecteur est le vecteur NUL

A

$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

B

Structure d'une preuve si et seulement si

A $\Rightarrow$ B

ET

A $\Leftarrow$ B

<u>PREUVE :</u>

$\boxed{A \Rightarrow B}$ ✓ $\quad 0 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \Rightarrow 0^2 = 0 = \underbrace{(v_1)^2}_{\geq 0} + (v_2)^2$

$x^2 \geq 0$ à cause du $(\,)^2$ et $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$!

Si $v_1 \neq 0$ alors $\|\vec{v}\|^2 > 0$ et donc $\|\vec{v}\| > 0$! $(\neq 0)$

$v_2 \neq 0$ alors $\|\vec{v}\|^2 > 0$ et $\|\vec{v}\| > 0$

$\Rightarrow v_1 = v_2 = 0$

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ ✓

$\boxed{A \Leftarrow B}$ ✓ $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\|\vec{0}\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0$! ✓

CQFD.